

УДК 539.3:534.1

ВПЛИВ В'ЯЗКИХ КОНСТРУКТИВНИХ ЕЛЕМЕНТІВ У ЗАКРІПЛЕННІ НА ДИНАМІКУ БУРИЛЬНОЇ КОЛОНИ ПІД ЧАС ЇЇ ПОЗДОВЖНИХ КОЛИВАНЬ

В.В.Перепічка, В.В.Тирлич, Т.М.Даляк, М.Й.Бурда

ІФНТУНГ, 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15, тел. (0342) 42123,
e-mail: orp@iung.edu.ua

Отримано аналітичний розв'язок задачі динаміки пружного стрижня із зосередженими в'язкостями на торцях. Після відповідного підбору параметрів отримані результати можуть бути використані під час аналізу хвильових процесів у бурильній колоні як в період поширення збурення, так і в усталених режимах коливань.

Ключові слова: бурильна колона, стрижень, коливання, в'язкість.

Получено аналитическое решение задачи динамики упругого стержня с сосредоточенными вязкостями на торцах. При соответствующем выборе параметров полученные результаты могут использоваться для анализа волновых процессов в буровой колонне как при распространении возмущения, так и при установившемся режиме колебаний.

Ключевые слова: буровая колонна, стержень, колебания, вязкость.

In this report, an analytical solution of the dynamics of an elastic rod with concentrated viscosity on the ends. With an appropriate choice of parameters, the results can be used to analyze the wave propagation in drill pipe as the propagation of a disturbance in period and at steady state oscillation.

Keywords: rod, drill column, oscillation, viscosity.

Під час розв'язання прикладних задач динаміки конструкцій, які за своєю природою є багатопараметричними, важливим є не лише вміння визначати кінематику та напружено-деформований стан для конкретних параметрів, але й можливість якісної оцінки різниці динаміки пружної системи за різних значень певного параметра. Простий перебір в пошуку якісних суджень часто не є ефективним з точки зору часу на рахунок і аналіз. У даній роботі отримано аналітичний розв'язок задачі коливання простого стрижня, в якому зосереджені в'язкості з області закріплення набагато вищі за решту зосереджених чи розподілених чинників, наявність котрих можлива в такого типу моделях. За отриманими результатами можливо визначити кінематичну і деформівну складову процесу коливань, зрозуміти тенденції динамічної жорсткості системи залежно від конструктивних (в'язкість поршнів) чи технологічних (прикладене збурення) чинників.

Змодельовано бурильну колону як простий пружний стрижень, орієнтований вертикально, з постійною по довжині площею поперечного перерізу (A). У стані рівноваги цей стрижень перебуватиме за рахунок утримуючих сил, котрі прикладені до нижнього ($P_1 = \sigma_1 \cdot A$) і верхнього торців ($P_2 = \sigma_2 \cdot A$) та спрямовані у напрямку, протилежному до напрямку сили ваги стрижня. В'язкі конструктивні елементи, котрі з'єднують стрижень з несучим масивом, закріплені на нижньому і верхньому боках стрижня та характеризуються відповідно коефіцієнтами в'язкості γ_1 і γ_2 . У випадку, коли в'язкість поршня на будь-якому з торців приймається рівною нулю, отримуємо вільний край, коли ж цей параметр є нескінченно великим – жорстке

затиснення. Система відліку є нерухомою системою координат, початок якої збігається з центром ваги нижнього торця у початковій конфігурації та напрямом осі Ox вздовж стрижня. За початковий момент часу приймається момент прикладання збурюючого навантаження ($P_0(t) = \sigma_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot A$) до відлікової конфігурації заданої пружної системи. Можливість упору в процесі руху в даній роботі не розглядається.

Розглядаємо стрижень як систему з розподіленими параметрами, рівняння руху перерізів якого під час поздовжніх коливань [1] у фізичних змінних зводиться до одномірного хвильового рівняння з правою частиною, що визначається гравітаційною складовою маси стрижня:

$$\frac{\partial^2 u_\Sigma}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u_\Sigma}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2} g. \quad (1)$$

Тут позначено: $u_\Sigma(x, t)$ – переміщення перерізу стрижня в актуальній конфігурації; $c = \sqrt{E/\rho}$ – швидкість поширення хвиль у стрижні; E – модуль Юнга; ρ – густина матеріалу стрижня; g – прискорення вільного падіння.

Крайові умови в фізичних змінних:

$$\begin{aligned} AE \cdot \frac{\partial u_\Sigma(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=0} &= \\ &= -\sigma_1 \cdot A - \sigma_0 \cdot \sin(\omega t) \cdot A + \gamma_1 \cdot \frac{\partial u_\Sigma(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=0}; \quad (2) \\ AE \cdot \frac{\partial u_\Sigma(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=l} &= \sigma_2 \cdot A - \gamma_2 \cdot \frac{\partial u_\Sigma(x, t)}{\partial t} \Big|_{x=l}. \end{aligned}$$

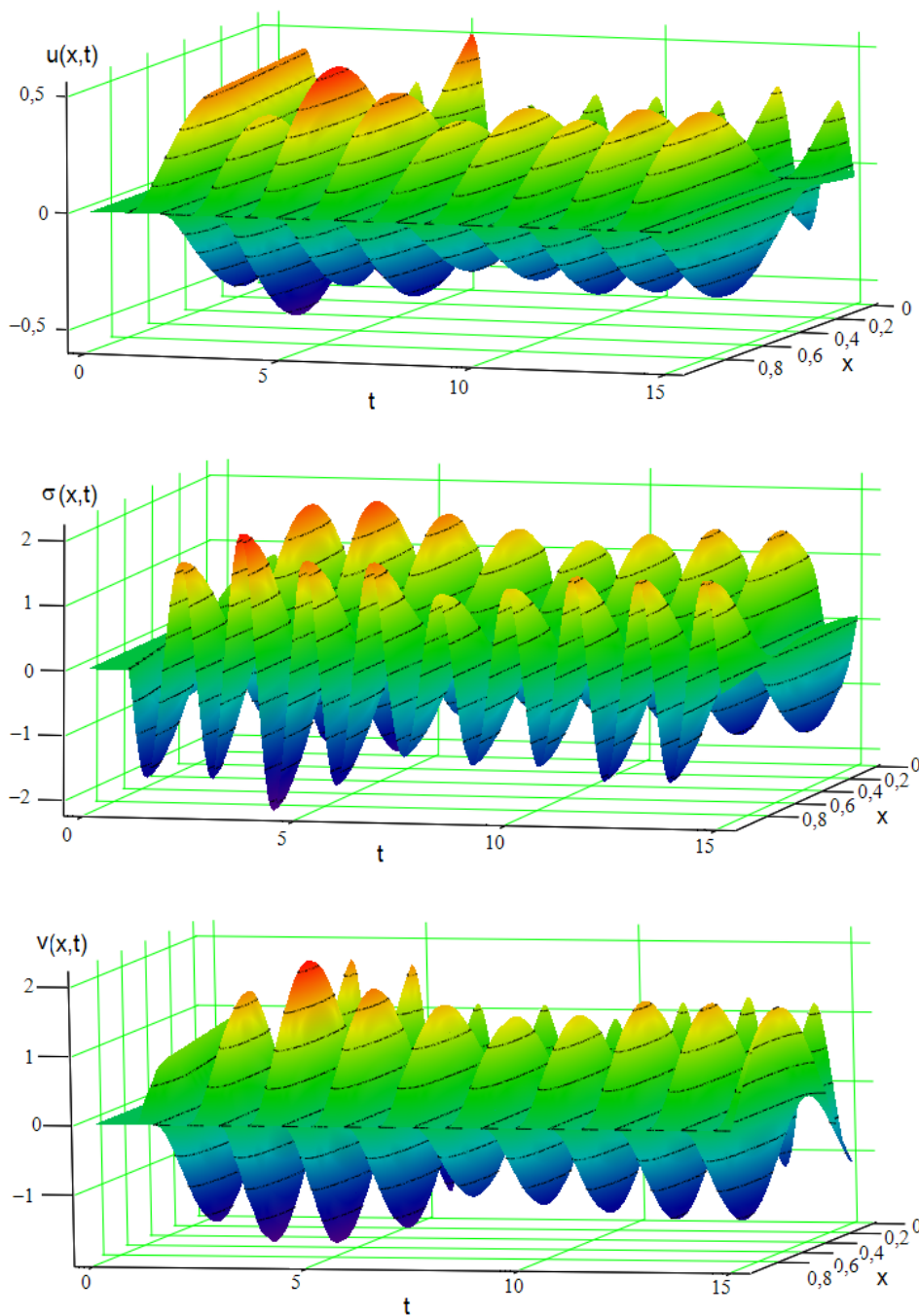


Рисунок 1 – Залежності переміщень (а), напружень (б) та швидкостей (в) від часу вздовж бурильної колони

Початкові умови:

$$u_{\Sigma}(x, 0) = u_{st}(x) = l \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot g}{c^2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{\sigma_1}{E} \cdot \frac{x}{l} \right),$$

$$\left. \frac{\partial u_{\Sigma}(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = 0. \quad (3)$$

У результаті отримаємо:

$$A \cdot \sigma_1 + A \cdot \sigma_2 = Al\rho g \Rightarrow \frac{\sigma_1}{E} + \frac{\sigma_2}{E} = \frac{l \cdot g}{c^2}.$$

Подамо шукані переміщення перерізів стрижня в актуальній конфігурації як суму ста-

тичної та динамічної складових ($u_{\Sigma}(x, t) = u_{st}(x) + u_{dn}(x, t)$). Послугуючись підходом роботи [2], з метою спрощення аналізу отриманих результатів, перейдемо до безрозмірних змінних $\tau = \frac{ct}{l}$, $\xi = \frac{x}{l}$ та перепозначимо $u(\xi, \tau) \equiv \frac{u_{dn}(\xi, \tau)}{l}$. Після певних спрощень отримаємо подання крайової задачі (1) – (3) для визначення динамічної складової усереднених за площею переміщень перерізів стрижня:

$$\frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \xi^2} = \frac{\partial^2 u(\xi, \tau)}{\partial \tau^2}, \quad \xi > 0, \tau > 0. \quad (4)$$

Початкові умови:

$$u(\xi, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\tau=0} = 0. \quad (5)$$

Крайові умови:

$$\left. \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = -\frac{\sigma_0}{E} \cdot \sin(k \cdot \tau) + \beta_1 \cdot \left. \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\xi=0},$$

$$\left. \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = -\beta_2 \cdot \left. \frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} \right|_{\xi=1}. \quad (6)$$

Тут позначено

$$\beta_i = \frac{\gamma_i \cdot c}{AE} = \frac{\gamma_i}{A \rho \cdot c} = \frac{\gamma_i}{A \sqrt{\rho \cdot E}}, \quad k = \frac{l \cdot \omega}{c}.$$

Стосовно безрозмірних параметрів задачі $\beta_i \in [0, \infty[$ можна сказати, що коли трактувати імпеданс як відношення сили до середньої швидкості точок поверхні [3], останній параметр відповідатиме відношенню в'язкості поршня до в'язкості поперечного перерізу стрижня на фронті прямої хвилі.

Скористаємось методами операційного числення [4, 5], застосувавши до розв'язання сформульованої задачі перетворення Лапласа.

Нехай

$$u(\xi, \tau) \sim U(\xi, p) \Leftrightarrow U(\xi, p) = \int_0^\infty u(\xi, \tau) e^{-p\tau} d\tau.$$

Переходячи в рівнянні до зображень і враховуючи нульові початкові умови для динамічної складової розв'язку, отримаємо операційний еквівалент задачі (4) – (6) у вигляді звичайного диференційного рівняння для функції трансформанти: $U_{\xi\xi}(\xi, p) - p^2 U(\xi, p) = 0$, та відповідних крайових умов

$$U_\xi(0, p) = -\frac{\sigma_0}{E} \cdot F(p) + \beta_1 \cdot p \cdot U(0, p);$$

$$U_\xi(a, p) = -\beta_2 \cdot p \cdot U(a, p).$$

Тут і надалі для зручності сприйняття подань скористаємось позначеннями:

$$a \equiv 1,$$

$$f(t) = \sin(kt) \sim F(p) \Leftrightarrow F(p) = \int_0^\infty f(\tau) e^{-p\tau} d\tau.$$

Загальний розв'язок отримуємо у вигляді $U(\xi, p) = C_1 e^{-p\xi} + C_2 e^{p\xi}$ і з крайових умов визначаємо константи:

$$C_1 = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{F(p)}{p} \cdot \frac{1}{1 + \beta_1} \cdot \frac{1}{1 - M \cdot e^{-2pa}};$$

$$C_2 = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{F(p)}{p} \cdot \frac{1}{1 + \beta_1} \cdot M_2 \cdot \frac{e^{-2pa}}{1 - M \cdot e^{-2pa}}.$$

Тут введено позначення:

$$M_1 = \frac{1 - \beta_1}{1 + \beta_1}, \quad M_2 = \frac{1 - \beta_2}{1 + \beta_2}, \quad M = M_1 \cdot M_2,$$

$$-1 \leq M_1 \leq 1, \quad -1 \leq M_2 \leq 1, \quad -1 \leq M \leq 1.$$

Таким чином, розв'язок задачі в образах може бути поданий у таких варіантах:

$$U(\xi, p) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{1}{1 + \beta_1} \cdot \frac{F(p)}{p} \cdot \frac{e^{-p\xi} + M_2 \cdot e^{p(\xi-2a)}}{1 - M \cdot e^{-2pa}}. \quad (7)$$

$$U(\xi, p) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{1}{1 + \beta_1} \cdot \frac{F(p)}{p} \times$$

$$\times \sum_{n=0}^\infty M^n \cdot [e^{-p(\xi+2na)} + M_2 \cdot e^{p(\xi-2(n+1)a)}]. \quad (8)$$

Перша форма запису зручна для асимптотичного аналізу, з другої легко отримати фізично обумовлений аналітичний розв'язок сформульованої задачі, котрий в кожному конкретний момент точно відображає хвильову картину. Скориставшись теоремою про згортку і еквівалентністю записів:

$$\int_0^\tau f(\tau-s)H(s-\xi)ds \equiv \int_0^{\tau-\xi} f(s)ds, \quad (\text{тут } i \text{ надалі}$$

$$H(\tau) - \text{функція Хевісайда}) \text{ після обернення трансформанти, отримаємо таке подання оригіналу:}$$

$$u(\xi, \tau) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{1}{1 + \beta_1} \cdot \sum_{n=0}^\infty [M^n \times$$

$$\times \left\{ \int_0^{\tau-(\xi+2na)} \sin(ks)ds \cdot H(\tau-(\xi+2na)) + M_2 \times \right.$$

$$\times \left. \int_0^{\tau-(2(n+1)a-\xi)} \sin(ks)ds \cdot H(\tau-(2(n+1)a-\xi)) \right\}].$$

Таким чином, коливання у в'язкозакріпленому стрижні під час гармонійного навантаження з плавним наростанням сили в початковий момент повною мірою визначаються розв'язком крайової задачі (4) – (5):

$$u(\xi, \tau) = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{1 + M_1}{2k} \sum_{n=0}^\infty [M^n \times$$

$$\times \{(1 - \cos[k(\tau-(\xi+2na))])H(\tau-(\xi+2na)) + M_2 \times$$

$$\times (1 - \cos[k(\tau-(2(n+1)a-\xi))]) \cdot H(\tau-(2(n+1)a-\xi))\}] \quad (9)$$

$$\frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \xi} = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{1 + M_1}{2} \sum_{n=0}^\infty [M^n \times$$

$$\times \{-\sin[k(\tau-(\xi+2na))]H(\tau-(\xi+2na)) + M_2 \times$$

$$\times \sin[k(\tau-(2(n+1)a-\xi))] \cdot H(\tau-(2(n+1)a-\xi))\}] \quad (10)$$

$$\frac{\partial u(\xi, \tau)}{\partial \tau} = \frac{\sigma_0}{E} \cdot \frac{1 + M_1}{2} \sum_{n=0}^\infty [M^n \times$$

$$\times \{\sin[k(\tau-(\xi+2na))]H(\tau-(\xi+2na)) + M_2 \times$$

$$\times \sin[k(\tau-(2(n+1)a-\xi))] \cdot H(\tau-(2(n+1)a-\xi))\}] \quad (11)$$

Розв'язок вихідної крайової задачі (1) – (3)
 $u_{\Sigma}(x, t) = u_{st}(x) + u_{dn}(x, t)$ має вигляд:

$$\frac{u_{\Sigma}(\xi, \tau)}{l} = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{l \cdot g}{c^2} \left(\frac{x}{l} \right)^2 - \frac{\sigma_1}{E} \cdot \frac{x}{l} \right) + u(\xi, \tau). \quad (12)$$

Виходячи з асимптотичного аналізу (7), можна одразу стверджувати, що параметр M є визначальним для даної задачі. У випадку, коли значення M є додатнім, то власні частоти розглядуваного стрижня збігаються з частотами незакріпленого стрижня, коли ж $M < 0$, то власні частоти такі ж, як у консольного стрижня. Коли $M = 0$ хвильова картина характеризується відсутністю відбитих хвиль в місці закріплення поршня з приведеною в'язкістю, рівною одиниці ($\beta_i = 1$) (див. (8)). Таким чином, в'язкість в закріпленні впливає на власні частоти коливань лише в сенсі типу, а не значення. Величина $\ln \sqrt{|M|}$ визначає логарифмічний декремент затухання коливань.

Як приклад наведемо аналіз напруженого стану в колоні залежно від приведених параметрів задачі. Приймаємо, що довжина бурової колони $l = 2600 \text{ м}$, площа – $A = 40,84 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, модуль Юнга $E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$, густина $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$, швидкість поширення хвилі $c = 5,2 \text{ км/с}$, частота обертання колони $\omega = 8 \text{ с}^{-1}$. Вважаємо, що закріплення верху бурової колони, яку моделюємо стрижнем, має достатньо велику в'язкість. Таким чином, можна вважати що крайова умова наближається до моделі жорсткого закріплення ($\beta_2 = 1000 \gg 1$). Взаємодія нижньої частини колони з вибоєм відбувається крізь в'язкий демпфер з приведеною в'язкістю $\beta_1 = 0,2$. Приведена частота $k = 4$. На наведених графіках динамічних складових переміщень, напружень і швидкостей видно, що внаслідок втрат енергії, пов'язаних з дисипативним розсіюванням, усталений режим коливань настає досить швидко і відбувається стаціонарно.

Слід зазначити, що дана задача є аналоговою до задачі динаміки триступінчастого нескінченного стрижня, коли навантаження прикладається до краю перемички. Отримані в даній роботі подання розв'язку, при трактуванні коефіцієнтів безрозмірної в'язкості як відношення площ крайніх ділянок до площі середньої, описують хвильовий процес у виточці чи буртику достатньо довгого стрижня.

1 Василенко М.В. Теорія коливань і стійкості руху: підручник / М.В.Василенко, О.М.Алексейчук. – К.: Вища шк., 2004. – 525 с.

2 Перепичка В.В. Затухание ударных волн в упругом стержне с вязкопластическим сопротивлением // Тезисы докладов XVI конф. по вопросам рассеяния энергии при колебаниях мех. систем (г.Ивано-Франковск, 24–26 июня 1992 г.): – Киев: Ин-т пробл. прочности АН Украины, 1992. – С. 28–29.

3 Джонсон К. Механика контактного взаимодействия: пер. с англ. / К.Джонсон – М.: Мир, 1989. – 510 с.

4 Сидоров Ю.В. Лекции по теории функций комплексного переменного: учеб. для вузов / Ю.В.Сидоров, М.В.Федорюк, М.И.Шабунин. – М.: Наука, 1989. – 480 с.

5 Слепян Л.С. Интегральные преобразования в нестационарных задачах механики / Л.С.Слепян, Ю.С.Яковенко – Л.: Судостроение, 1980. – 344 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії
 17.05.10

Рекомендована до друку професором
 Мойсишиним В.М.